Exemple

Montrons (par récurrence) que pour tout entier naturel n, on a

$$0+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Notons P_n la proposition $0+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

a) (Initialisation)

Vérifions que la proposition P_0 est vraie.

$0+\ldots+0=0$ et $\frac{0(0+1)}{2}=0$ donc la proposition P_0 est vraie.

b) (Hérédité)

Fixons un entier naturel n, et montrons que si la proposition P_n est vraie, alors la proposition P_{n+1} est vraie.

Supposons que la proposition P_n est vraie

(hypothèse de récurrence).

Montrons qu'alors la proposition P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire montrons

$$0+\ldots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

On a

$$0+\ldots+(n+1)=0+\ldots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

c) Ainsi (d'après le principe de récurrence) toutes les propositions P_n, $n\in\mathbb{N}$, sont vraies.